Équations différentielles ordinaires
TD5 – Équations différentielles non linéaires

($\star\star$) **Exercice 0** – *Fonction lipschitzienne*
On considère la fonction
$$F : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{R}^d} \text{ si } \|x\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1, \\ \|x\|^2_{\mathbb{R}^d} \text{ sinon.} \end{cases}$$
Montrez que F n'est ni globalement lipschitzienne, ni de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, mais qu'elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$.

Résolutions explicites

($\star$) **Exercice 1** – *Au carré*
Déterminez l'ensemble des solutions maximales des équations différentielles scalaire $y' = y^2$ et $y' = y\,|y|$.

($\star$) **Exercice 2** – *Équation différentielle à variables séparées*
Montrez que le problème
$$(t^2+1)\,y' = (t+1)\,y^2, \quad y(0) = 1,$$
admet une unique solution maximale (J, y). Déterminez y, et montrez que J est borné.

($\star$) **Exercice 3** – *Puissance α*
Soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. On définit
$$f_\alpha : y \in]0, \infty[\mapsto y^\alpha = \exp(\alpha \ln(y)) \in \mathbb{R}.$$
1) Montrez que le problème de Cauchy
$$y' = f_\alpha(y), \quad y(1) = y_1 > 0,$$
admet une unique solution maximale (J, y).
2) Déterminez J et y.
3) Déterminez les limites de y en $\inf(J)$ et $\sup(J)$.

($\star\star\star$) **Exercice 4** – *Puissance α, le retour*
Pour α dans $]0,1[$, on pose
$$F_\alpha : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0, \\ y^\alpha \text{ sinon .} \end{cases}$$
Déterminez l'ensemble des solutions du problème de Cauchy $y' = F_\alpha(y)$, $y(0) = 0$.

($\star$) **Exercice 5** – *Équation de Bernoulli*
Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et $a, b : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère le problème de Cauchy
$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \in I,\ y_0 > 0.$$
où
$$f : (t, y) \in I \times]0, \infty[\mapsto a(t)\,y + b(t)y^\alpha \in \mathbb{R}.$$
1) Montrez que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (J, y).
2) Justifiez que la fonction $w : t \in J \mapsto y^{1-\alpha}$ est bien définie, et de classe C^1. Quelle équation différentielle est satisfaite par w sur J ?
3) Application : déterminez la solution maximale du problème de Cauchy
$$y' = y + y^{1/3},\ y(0) = 1.$$

($\star\star$) **Exercice 6 –** *Forme non résolue*
Soit $y \in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout t réel, $y'(t)^2 = y(t)$.
1) Soient t_-, t_+ deux réels, $t_- \leq t_+$, tels que $y(t_-) = y(t_+) = 0$. Montrez que $y(t) = 0$ pour tout t dans $[t_-, t_+]$.
2) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) > 0$. On note

$$T_- = \inf \{T < t_0, \forall t \in [T, t_0], y(t) > 0\}, \; T_+ = \sup \{T > t_0, \forall t \in [t_0, T], y(t) > 0\}.$$

(i) Montrez que $y(t) > 0$ pour tout t dans $]T_-, T_+[$.

(ii) Montrez que $y'(t) > 0$ pour tout t dans $]T_-, T_+[$.

(iii) En déduire y sur $]T_-, T_+[$, T_- et T_+. On exprimera y en fonction de t et T_-.

3) Que dire si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) < 0$?
4) En déduire l'ensemble des fonctions $y \in C^1(\mathbb{R})$ telles que $y'(t)^2 = y(t)$ pour tout t réel. Déterminez l'ensemble des solutions de classe C^2.

Résultats théoriques

($\star$) **Exercice 7 –** *Exponentielle* Dans cet exercice, nous allons définir l'exponentielle comme solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}_e) \quad y' = y, \; y(0) = 1.$$

1) Se convaincre que les Sections 5.1 et 5.2 du Chapitre 5 du cours n'utilisent pas la fonction exponentielle.

À partir de maintenant, dans cet exercice, on utilisera uniquement les résultats des Sections 5.1 et 5.2 du Chapitre 5.
2) Montrez que le problème $(\mathcal{P}_e)$ admet une unique solution maximale (J, y). Montrez que y est de classe C^∞ sur J.
3) Montrez que pour tout t dans J, $y(t) > 0$.
4) Montrez que y est strictement croissante sur J. En déduire que $\inf(J) = -\infty$.

On suppose maintenant que $\sup(J) < \infty$, et on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \sup(J) + 10$. On définit alors

$$v_n : t \in [0, \sup(J)] \mapsto \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N.$$

5) Montrez que v_n est de classe C^∞, strictement positive, et décroissante sur $[0, \sup(J)]$.
6) Montrez que $w : t \in [0, \sup(J)[\mapsto y(t)\, v_N(t)$ est décroissante. En déduire que y est bornée au voisinage de $\sup(J)$. Conclure.

On a donc montré que la solution (J, y) au problème de Cauchy $(\mathcal{P}_e)$ est globale, autrement dit $J = \mathbb{R}$. Bien évidemment, y n'est autre que la fonction exponentielle. On peut alors s'amuser à remontrer toutes les propriétés vérifiées par cette fonction, comme par exemple :

7) Montrez que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y(a + b) = y(a)\, y(b)$.

($\star$) **Exercice 8 –** *Convergence vers un équilibre*
Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ localement lipschitzienne.

1) Montrez que $(\mathbb{R}, y_l)$, où $y_l : t \in \mathbb{R} \mapsto l \in \mathbb{R}^d$ est une fonction constante, est solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$ si et seulement si $f(l) = 0_{\mathbb{R}^d}$.

Si $f(l) = 0_{\mathbb{R}^d}$, on dit que l est un équilibre de l'équation différentielle.

2) On considère (J, y) une solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(y)$. On suppose que $\sup(J) = +\infty$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = l.$$

Montrez que $f(l) = 0_{\mathbb{R}^d}$ (et donc que l est un équilibre de l'équation différentielle).
Indication : on pourra étudier la fonction $g : t \in J \mapsto \big(y(t), f(l)\big)_{\mathbb{R}^d}$.

($\star$) **Exercice 9** $-$ *Croissance quadratique*

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ de classe C^1. On suppose qu'il existe c_1, c_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout t dans I et tout $y \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$\left|\big(f(t,y),y\big)_{\mathbb{R}^d}\right| \le c_1(t)\|y\|^2_{\mathbb{R}^d} + c_2(t).$$

Montrez que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ sont globales.

($\star\star$) **Exercice 10** $-$ *Solutions périodiques*

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout t réel, tout y de $\mathbb{R}^d$, on ait

$$f(t+T,y) = f(t,y).$$

Soit (J,y) une solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$. On suppose qu'il existe t_0 dans J tel que $t_0 + T \in J$ et $y(t_0+T) = y(t_0)$. Montrez que $J = \mathbb{R}$ et y est $T-$périodique.

($\star\star$) **Exercice 11** $-$ *Solution dans un compact*

L'objectif de cet exercice est de proposer une preuve directe du Corollaire 5.23, n'utilisant pas le Théorème de sortie de compact, ni son alter-ego le Théorème d'explosion en temps fini.

Soit donc $f : I \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne. On considère (J,y) une solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$. On suppose qu'il existe $\mathscr{K}$ compact de Ω tel que $y(t)$ reste dans $\mathscr{K}$ pour t proche de $\sup(J)$. L'objectif est de montrer que $\sup(J) = \sup(I)$.

On suppose $\sup(J) < \sup(I)$, et on fixe t_0 dans J.

1) Montrez que y' est borné sur $[t_0, \sup(J)[$.
2) En déduire que y est lipschitzienne sur $[t_0, \sup(J)[$.
3) En déduire qu'il existe $y_l \in \mathscr{K}$ tel que $y(t)$ tend vers y_l quand t tend vers $\sup(J)$ par valeurs inférieures.
4) Montrez que y' tend vers $f(\sup(J), y_l)$ lorsque t tend vers $\sup(J)$ par valeurs inférieures.
5) Montrez que le problème de Cauchy

$$z' = f(t,z), \quad z(\sup(J)) = y_l,$$

admet une unique solution maximale $(\tilde{J}, \tilde{y})$.
6) On définit

$$\mathscr{Y} : t \in J \cup \tilde{J} \mapsto \begin{cases} y(t) \text{ si } t \in J, \\ \tilde{y}(t) \text{ si } t \in \tilde{J} \setminus J. \end{cases}$$

Montrez que $(J \cup \tilde{J}, \mathscr{Y})$ est solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$. Conclure.

Analyse qualitative

($\star$) **Exercice 12** $-$ *Solutions bornées*

Pour x_0 réel quelconque, on considère le problème de Cauchy

$$(\star) \quad y' = y\,\sin(y)^2,\ y(0) = x_0.$$

1) Montrez que ce problème admet une unique solution maximale (J_0, y_0).
2) Montrez que $J_0 = \mathbb{R}$ et y_0 est constante si et seulement si $x_0 = k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3) Montrez que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, y_0 est bornée. En déduire que $J_0 = \mathbb{R}$.
Indication : on pourra remarquer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\,\pi \le x_0 < (k+1)\pi$.
4) Montrez que y_0 est monotone sur $\mathbb{R}$.
5) En déduire que y_0 admet des limites en $\pm\infty$. Quelles sont ces limites ?
Indication : Exercice 8.
6) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $(\mathbb{R}, y_+)$ la solution de $(\star)$, et $(\mathbb{R}, y_-)$ la solution de $y' = y\sin(y)^2$, $y(0) = -x_0$. Montrez que $y_- = -y_+$.

($\star$) **Exercice 13 –** *Faire un dessin*
Soit $f : (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto t^2 + y^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(\star) \quad y' = f(t,y),\ y(0) = 0.$$

1) Montrez que $(\star)$ admet une unique solution maximale (J, y).
2) On pose $J =]-\alpha, \beta[$, avec $\alpha, \beta > 0$, et on définit $\tilde{J} =]-\beta, \alpha[$, et $\tilde{y} : t \in \tilde{J} \mapsto -y(-t)$.

(i) Montrez que $\tilde{y}$ est bien définie et de classe C^1 sur $\tilde{J}$.

(ii) Montrez que $(\tilde{J}, \tilde{y})$ est solution de $(\star)$. En déduire que $y = \tilde{y}$ sur $J \cap \tilde{J}$.

(iii) On définit

$$\mathscr{Y} : t \in J \cup \tilde{J} \mapsto \begin{cases} y(t) \text{ si } t \in J, \\ \tilde{y}(t) \text{ si } t \in \tilde{J}. \end{cases}$$

Montrez que $\mathscr{Y}$ est bien définie. Montrez que $(J \cup \tilde{J}, \mathscr{Y})$ est solution de $(\star)$.

(iv) En déduire que $\alpha = \beta$ et que y est impaire.

3) Étudier la monotonie et la convexité de y sur J.
4) Montrez que $y(t) = \frac{t^3}{3} + o(t^3)$.
5) On suppose que $\sup(J) = +\infty$. Montrez qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 1$, $\arctan(y(t)) \geq t + c$. Qu'en conclut-on ?
6) Que vaut $\lim_{t \to \sup(J)} y(t)$?
7) Dessinez l'allure de la fonction y sur J.

($\star$) **Exercice 14 –** *Modèle logistique de population*
Pour $\alpha > 0$, $N > 0$ et $n_0 \geq 0$, on considère le problème de Cauchy

$$(\star) \quad n' = \alpha n \left(1 - \frac{n}{N}\right),\ n(0) = n_0.$$

1) Démontrez que $(\star)$ admet une unique solution maximale (J, n).
2) Quelles sont les $n_0 \geq 0$ tels que n soit constante ?
3) On suppose $n_0 \in [0, N]$. Montrez que $J = \mathbb{R}$, déterminez la monotonie de n sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses limites en $\pm\infty$.
4) On suppose $n_0 > N$. Montrez que $J =]-\beta, +\infty[$ pour un certain $\beta > 0$. Déterminez la monotonie de n sur J, ainsi que ses limites en $-\beta$ et $+\infty$.

Correction

Exercice 0 Montrons tout d'abord que F n'est pas globalement lipschitzienne. Si c'était le cas, on aurait $L > 0$ tel que pour tous x_1, x_2 dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Prenons $x_1 = 0$ et $x_2 = \rho\tilde{x}$, avec $\|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} = 1$ et $\rho > 1$. Il vient

$$|F(x_1) - F(x_2)| = |F(\rho\tilde{x})| = \rho^2,$$

alors que

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d} = \|\rho\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} = \rho.$$

On devrait donc avoir $\rho^2 \geq L\,\rho$ pour tout $\rho > 1$. Il suffit de choisir $\rho > \max(L, 1)$ pour obtenir une contradiction.
On va maintenant montrer que F n'est pas de classe C^1. Supposons qu'elle le soit, et notons $DF(0_{\mathbb{R}^d})$ sa différentielle en zéro. Il vient, pour tout x dans $\mathbb{R}^d$,

$$F(x) = F(0_{\mathbb{R}^d}) + DF(0_{\mathbb{R}^d})(x) + o(\|x\|_{\mathbb{R}^d}).$$

Fixons $\tilde{x}$ tel que $\|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} = 1$. Pour $\rho \in [-1, 1]$, il vient

$$|\rho| = F(\rho\tilde{x}) = \rho\,(DF(0_{\mathbb{R}^d})(\tilde{x})) + o(\rho).$$

En prenant $\rho > 0$, on obtient

$$1 = DF(0_{\mathbb{R}^d})(\tilde{x}) + o(1) \Rightarrow DF(0_{\mathbb{R}^d})(\tilde{x}) = 1.$$

En prenant $\rho < 0$, on obtient

$$-1 = DF(0_{\mathbb{R}^d})(\tilde{x}) + o(1) \Rightarrow DF(0_{\mathbb{R}^d})(\tilde{x}) = -1.$$

Contradiction.
Montrons maintenant que F est localement lipschitzienne. Notons tout d'abord

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\|_{R^d} > 1\right\},$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix} \in \Omega$, on a

$$F(x) = \|x\|_{\mathbb{R}^d} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2.$$

Ainsi, F est polynomiale en les coordonnées sur Ω, donc de classe C^∞, donc de classe C^1, donc localement lipschitzienne.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\|_{\mathbb{R}^d} < 1$. Soit $\eta_x = 1 - \|x\|_{\mathbb{R}^d}$. Pour tout $\tilde{x}$ dans $\mathcal{B}_{\eta_x}(x)$, on a

$$\|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \|\tilde{x} - x\|_{\mathbb{R}^d} < \|x\|_{\mathbb{R}^d} + \eta_x < 1,$$

et donc

$$|F(x) - F(\tilde{x})| = |\|x\|_{\mathbb{R}^d} - \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d}| \leq \|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Soit finalement $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\|_{\mathbb{R}^d} = 1$, et $\rho = \frac{1}{2}$. Soit $\tilde{x} \in \mathcal{B}_\rho(x)$. Alors

— soit $\|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1$, et alors par simple inégalité triangulaire,

$$|F(x) - F(\tilde{x})| = |\|x\|_{\mathbb{R}^d} - \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d}| \leq \|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d}.$$

— soit $\|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d} \geq 1$. Il vient alors

$$|F(x) - F(\tilde{x})| = |1 - \|\tilde{x}\|^2_{\mathbb{R}^d}| = \|\tilde{x}\|^2_{\mathbb{R}^d} - 1.$$

Écrivons alors $\tilde{x} = x + s\,e$, avec $s \in]0, \rho[$ et $\|e\|_{\mathbb{R}^d} = 1$. Il vient

$$\|\tilde{x}\|^2_{\mathbb{R}^d} - 1 = s^2 + 2\,s\,e \cdot x.$$

On voudrait donc choisir $L_x > 0$ assez grand tel que, pour tout s dans $]0, \rho[$, tout $e \in \mathbb{R}^d$, $\|e\|_{\mathbb{R}^d} = 1$, on ait

$$s^2 + 2\,s\,e \cdot x \leq L_x \|\tilde{x} - x\|_{\mathbb{R}^d} = L_x\,s,$$

soit encore

$$0 \leq s\,(L_x - 2\,e \cdot x - s)\,.$$

Comme $s \in]0, \rho[$ avec $\rho = \frac{1}{2}$, et $e \cdot x \leq \|e\|_{\mathbb{R}^d} \|x\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1$, on peut choisir $L_x = 3$.

On a ainsi obtenu que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_{\mathbb{R}^d} = 1$, pour tout $\tilde{x} \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(x)$, on a $|F(x) - F(\tilde{x})| \leq 3\|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^d}$. Le résultat suit.

Exercice 1 Notons tout d'abord que les fonctions $f_1 : y \in \mathbb{R} \mapsto y^2$ et $f_2 : y \in \mathbb{R} \mapsto y\,|y|$ sont de classe C^1, donc localement lipshitizienne. Ainsi, si on fixe (t_0, y_0) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy $y' = f_k(y),\ y(t_0) = y_0$ admet une unique solution maximale.
Commençons notre étude avec f_1. On note que $(\mathbb{R}, 0)$ est solution maximale de l'équation différentielle $y' = y^2$. Donc si $y_0 \neq 0$, la solution maximale (J, y) de $y' = y^2$, $y(t_0) = y_0$ ne s'annule jamais. On peut donc diviser par y^2, et on obtient, pour tout t dans J,

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right)(t) = \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}.$$

Le dénominateur s'annule en $T_0 = t_0 + \frac{1}{y_0}$. Ainsi, on a

— si $y_0 > 0$, $J =]-\infty, T_0[$ et $y : t \in J \mapsto \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}$.

— si $y_0 < 0$, $J =]T_0, \infty[$ et $y : t \in J \mapsto \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}$.

— si $y_0 = 0$, $J = \mathbb{R}$, et $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 0$.

Regardons maintenant f_2. Comme pour $y \geq 0$, $f_2(y) = f_1(y)$, on obtient les mêmes solutions pour $y_0 \geq 0$. Supposons donc $y_0 < 0$. La solution maximale (J, y) ne s'annule jamais, reste ainsi strictement négative, et donc vérifie $y' = -y^2$, $y(t_0) = y_0$. En procédant comme ci-dessus, on obtient que pour tout t dans J,

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(t - t_0)}.$$

Le dénominateur s'annule en $\tilde{T}_0 = t_0 - \frac{1}{y_0}$. Ainsi,

— si $y_0 > 0$, $J =]-\infty, T_0[$ et $y : t \in J \mapsto \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}$.

— si $y_0 < 0$, $J =]-\infty, \tilde{T}_0[$ et $y : t \in J \mapsto \frac{y_0}{1 + y_0(t - t_0)}$.

— si $y_0 = 0$, $J = \mathbb{R}$, et $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 0$.

Exercice 2
Comme $t^2 + 1 \neq 0$, le problème se réécrit sous forme résolue

$$(\star) \quad y' = f(t, y), \quad y(0) = 1,$$

avec

$$f : (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \frac{t + 1}{t^2 + 1} y^2 \in \mathbb{R}.$$

Comme f est de classe C^∞, elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et $(\star)$ admet une unique solution maximale (J, y).

Notons que $(\mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \mapsto 0)$ est aussi solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. Le Corollaire 5.15 du cours nous assure alors que pour tout t dans J, $y(t) > 0$. On a donc le droit de diviser par y^2, et on obtient que pour tout t dans J,

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = \frac{t+1}{t^2+1} \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right)(t) = \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} = \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\sqrt{.^2+1}\right) + \arctan(.)\right)(t).$$

En intégrant entre 0 et $t \in J$, on obtient

$$1 - \frac{1}{y(t)} = \ln\left(\sqrt{t^2+1}\right) + \arctan(t),$$

soit encore

$$y(t) = \left[1 - \ln\left(\sqrt{t^2+1}\right) - \arctan(t)\right]^{-1}.$$

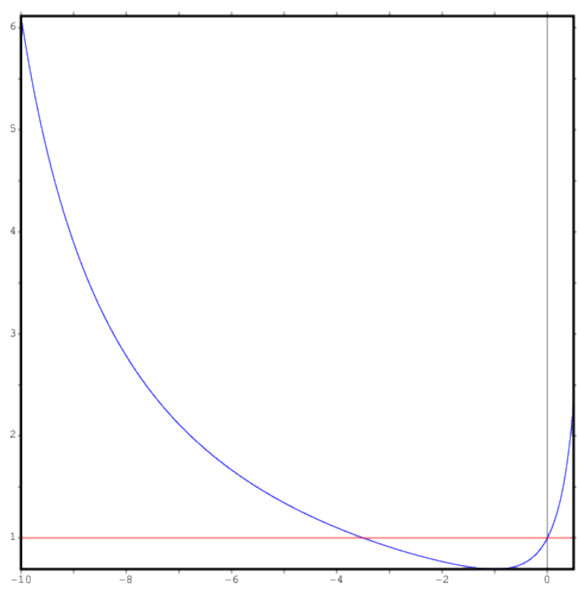
Reste à déterminer J. Par construction (pas besoin de refaire le calcul !), on a

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\sqrt{.^2+1}\right) + \arctan(.)\right)(t) = \frac{t+1}{t^2+1}.$$

Donc $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(\sqrt{t^2+1}\right) + \arctan(t)$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, \infty[$. Comme $g(-\infty) = g(+\infty) = +\infty$ et

$$g(-1) = \ln(\sqrt{2}) + \arctan(-1) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\ln(e)}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} < 0,$$

il existe un unique $T_- < 0$ et un unique $T_+ > 0$ tels que $g(T_-) = g(T_+) = 1$, et on a $J =]T_-, T_+[$. Numériquement, on trouve $T_- \sim -11.9906207773098$ et $T_+ \sim 0.8720993625058773$.



La fonction y sur $[-10, 0.5]$.

Exercice 3

1) La fonction f_α est de classe C^∞, donc localement lipschitzienne. Comme $y_1 > 0$ est bien dans l'ensemble de définition de f_α, le problème admet une unique solution maximale (J, y).

2) Par définition, y ne s'annule pas. On peut donc diviser par y, pour obtenir

$$1 = \frac{y'}{y^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}\right),$$

d'où l'on tire par intégration entre 1 et t, pour t dans J

$$t-1=\frac{y(t)^{1-\alpha}-y(1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Rightarrow y(t)=\left[y_1^{1-\alpha}+(1-\alpha)(t-1)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

On a y solution tant que

$$y_1^{1-\alpha}+(1-\alpha)(t-1)>0\Leftrightarrow(1-\alpha)t>1-\alpha-y_1^{1-\alpha}.\quad(\clubsuit)$$

On a donc deux cas, selon le signe de $1-\alpha$:

— soit $\alpha\in]0,1[$, et $(\clubsuit)$ donne $t>T_1=1-\frac{y_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, et donc $J=]T_1,+\infty[$

— soit $\alpha>1$, et $(\clubsuit)$ donne $t<T_1$, et donc $J=]-\infty,T_1[$.

3) Il faut de nouveau distinguer les cas $\alpha\in]0,1[$ et $\alpha>1$.
Considérons le cas $\alpha\in]0,1[$. Alors $J=]T_1,\infty[$, et $\lim_{t\to\infty}y(t)=+\infty$, $\lim_{t\to T_1}y(t)=0$.
Dans le cas $\alpha>1$, $J=]-\infty,T_1[$, et $\lim_{t\to-\infty}y(t)=0$ et $\lim_{t\to T_1}y(t)=+\infty$.

Exercice 4

Il est clair que $(0,t\in\mathbb{R}\mapsto 0)$ est une solution globale du problème de Cauchy. L'erreur serait de prétendre que c'est la seule solution globale en invoquant Cauchy-Lipschitz. En effet, la fonction F_α n'est pas lipschitzienne au voisinage de zéro.
Soit donc $(\mathbb{R},y)$ une solution globale quelconque. Par l'équation différentielle, on a $y'\geq 0$ sur tout $\mathbb{R}$, donc nécessairement y est une fonction croissante. Comme par la condition initiale, $y(0)=0$, il vient que $y(t)\leq 0$ pour tout $t\leq 0$. Mais par définition de F_α, on a, pour tout $t\leq 0$, $y'(t)=F_\alpha(y(t))=0$. Ainsi, f est constante sur $]-\infty,0[$, et comme $y(0)=0$, on a $y=0$ sur $]-\infty,0[$.
Toujours par croissance de y, $y(t)\geq y(0)=0$ sur $[0,\infty[$. Supposons qu'il existe $t_1>0$ tel que $y(t_1)>0$. Alors dans un voisinage de t_1, y satisfait l'équation différentielle $y'=y^\alpha$, que l'on sait résoudre par l'Exercice 3. On obtient

$$y(t)=[y(t_1)^{1-\alpha}+(1-\alpha)(t-t_1)]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

pour tout t dans $]T_1,+\infty[$, avec

$$T_1=t_1-\frac{y(t_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

On peut exprimer y en fonction de T_1, ce qui donne

$$y(t)=[(1-\alpha)(t-T_1)]^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t\in]T_1,\infty[.$$

On sait par ailleurs que $\lim_{t\to T_{1,+}}y(t)=0$. Comme $y=0$ sur $]-\infty,0]$ et $y>0$ sur $]T_1,\infty[$, on a nécessairement $T_1\geq 0$.
Fixons alors $T_1\geq 0$. Alors y définit par

$$y:t\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}[(1-\alpha)(t-T_1)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & ,\text{ pour } t>T_1,\\ 0 & ,\text{ pour } t\leq T_1,\end{cases}$$

est bien définie, continue par construction, de classe C^1 sur $]-\infty,T_1[\cup]T_1,\infty[$, et vérifie $y'=F_\alpha(y)$ sur $]-\infty,T_1[\cup]T_1,\infty[$. Reste donc à regarder ce qu'il se passe en T_1.
Clairement, puisque $y(t)=0$ pour $t<T_1$,

$$\lim_{t\to T_{1,-}}\frac{y(t)-y(T_1)}{t-T_1}=0.$$

Pour $t>T_1$, on a

$$\frac{y(t)-y(T_1)}{t-T_1}=\frac{[(1-\alpha)(t-T_1)]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{t-T_1}=(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t-T_1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\xrightarrow[t\to T_1]{}0.$$

Ainsi, y est dérivable en T_1, et $y'(T_1)=0=F_\alpha(y(T_1))$. Donc $(\mathbb{R},y)$ est solution de l'équation différentielle.

Au final, on a donc obtenu

$$\mathcal{S} = \left\{y \in C^1(\mathbb{R}),\ y' = F_\alpha(y)\right\} = \{t \in \mathbb{R} \mapsto 0\} \cup \{y_T,\ T \geq 0\},$$

où, pour tout $T \geq 0$, on a

$$y_T : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} [(1-\alpha)(t-T)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & , \text{ pour } t > T, \\ 0 & , \text{ pour } t \leq T, \end{cases}$$

Exercice 5

1) La fonction f est continue sur $I\times]0,\infty[$. Soient t_0 dans I, et y_0 dans $]0,\infty[$. Soit $\delta > 0$ tel que $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset I$. Comme a et b sont continues sur I, il existe $M_0 > 0$ tel que pour tout t dans $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, on ait $|a(t)| \leq M_0$ et $|b(t)| \leq M_0$. Comme l'application $y \in]0,\infty[\mapsto y^\alpha$ est de classe C^∞, elle est localement lipschitzienne. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que $y_0 - \delta > 0$, et $L_0 > 0$ tel que pour tout (y_1, y_2) dans $[y_0-\delta, y_0+\delta]^2$, on ait $|y_1^\alpha - y_2^\alpha| \leq L_0|y_1 - y_2|$.
On a donc, pour tout t dans $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, et tout (y_1, y_2) dans $[y_0-\delta, y_0+\delta]^2$,

$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= |a(t)y_1 + b(t)y_1^\alpha - a(t)y_2 - b(t)y_2^\alpha| \\ &\leq |a(t)|\,|y_1 - y_2| + |b(t)|\,|y_1^\alpha - y_2^\alpha| \leq M_0(1+L_0)|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Ainsi, f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz local assure l'existence et l'unicité de la solution maximale recherchée.
2) Par définition, pour tout t dans J, $y(t) > 0$. On peut donc définir

$$w(t) = y(t)^{1-\alpha} = \exp((1-\alpha)\ln(y(t))).$$

Par ailleurs, comme $y : J \mapsto]0,\infty[$ est de classe C^1, et $g : x \in]0,\infty[\mapsto x^{1-\alpha}$ est aussi de classe C^1, $w = g \circ y$ est de classe C^1 sur J. On peut donc dériver w, et on obtient

$$w' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} = (1-\alpha)\,(a\,y + b\,y^\alpha)\,y^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(a\,y^{1-\alpha} + b\right) = (1-\alpha)(a\,w + b),$$

qui est une équation différentielle linéaire !
3) On pose $w(t) = y(t)^{2/3}$, qui vérifie l'équation différentielle

$$w' = \frac{2}{3}w + \frac{2}{3},$$

ainsi que la condition initiale $w(0) = 1$. La solution maximale du problème de Cauchy

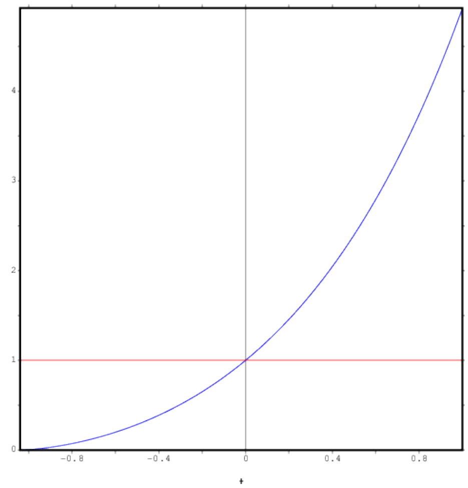
$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{2}{3},\ z(0) = 1,$$

est $(\mathbb{R}, z)$ avec $z : t \in \mathbb{R} \mapsto 2\exp\left(\frac{2}{3}t\right) - 1$. Mais attention : comme on a posé $w = y^{2/3}$, on cherche une solution strictement positive, il nous faut donc restreindre l'intervalle de définition. Ainsi, $z(t) > 0$ si et seulement si $t \in]T_-, +\infty[$ avec

$$T_- = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

On en déduit que la solution (J, w) recherchée est $J =]T_-, +\infty[$ et $w = z_{|J}$. La solution du problème initial est alors $(]T_-, +\infty[, y)$ avec

$$y : t \in]T_-, +\infty[\mapsto \left(2\exp\left(\frac{2}{3}t\right) - 1\right)^{3/2}.$$



La solution sur $]T_-, 1[$.

Exercice 6

1) Soit $t \in]t_-, t_+[$. Posons

$$\omega_- = \left\{\tilde{t} \in [t_-, t],\ y(\tilde{t}) = 0\right\}, \quad \omega_+ = \left\{\tilde{t} \in [t, t_+],\ y(\tilde{t}) = 0\right\}.$$

Comme $t_- \in \omega_-$ et $t_+ \tilde{\omega}_+$, ces deux ensembles sont non-vides. On définit alors

$$T_- = \sup(\omega_-), \quad T_+ = \inf(\omega_+).$$

Par définition, $t_- \leq T_- \leq t \leq T_+ \leq t_+$. Il existe une suite $(\tilde{t}_n)$ de ω_- qui tend vers T_-. Par définition, $y(\tilde{t}_n) = 0$, ce qui implique par continuité de y que $y(T_-) = 0$. De même, on a $y(T_+) = 0$.
Supposons alors $T_- < t < T_+$. Comme $y \in C^0([T_-, T_+]) \cap C^1(]T_-, T_+[)$ et $y(T_-) = y(T_+)$, on obtient par le théorème de Rolle l'existence de $\tilde{T}$ dans $]T_-, T_+[$ tel que $y'(\tilde{T}) = 0$. Mais on a alors par l'équation différentielle $0 = y'(\tilde{T})^2 = y(\tilde{T})$, ce qui est en contradiction avec soit la définition de T_-, soit celle de T_+, suivant la position de $\tilde{T}$ par rapport à t. Donc soit $T_- = t$, soit $T_+ = t$, et dans les deux cas $y(t) = 0$ (on prouve au passage que $T_- = T_+ = t$).
Comme cela est vrai pour tout t dans $]t_-, t_+[$, le résultat suit.
2) Notons avant de commencer que comme par hypothèse, pour tout t, $y'(t)^2 = y(t)$, on a $y \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si $y(t_0) \neq 0$, alors $y(t_0) > 0$.
(i) Soit t dans $]T_,T_+[$, et supposone $t \geq t_0$ (l'autre cas se traite de même, *mutatis mutandis*). Par définition de T_+, il existe T, $t_0 < T < T_+$, tel que pour tout $\tilde{t} \in [t_0, T]$, $y(\tilde{t}) > 0$. Mais t appartient à $[t_0, T]$. Le résultat suit.
(ii) Supposons qu'il existe $t \in]T_-, T_+[$ tel que $y'(t) \leq 0$. Comme $y'(t_0) > 0$ et y' est continue par hypothèse, par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tilde{t}$ dans $[\min(t, t_0), \max(t, t_0)]$ tel que $y'(\tilde{t}) = 0$. Mais par l'équation différentielle, il vient $y(\tilde{t}) = y'(\tilde{t})^2 = 0$, en contradiction avec le point (i). Ainsi, $y' > 0$ sur $]T_-, T_+[$.
(iii) Sur $]T_-, T_+[$, on a donc $y > 0$, $y' > 0$, et $(y')^2 = y$. On a donc, pour tout t dans $]T_-, T_+[$,

$$y'(t)^2 = y(t) \Leftrightarrow |y'(t)| = \sqrt{y(t)} \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{car } y'>0} y'(t) = \sqrt{y(t)}.$$

Comme $y > 0$ sur $]T_-, T_+[$, on peut diviser par $\sqrt{y}$, puis intégrer entre t_0 et t, pour obtenir

$$\sqrt{y(t)} = \sqrt{y(t_0)} + \frac{t - t_0}{2},$$

ce qui donne, puisque $y > 0$ sur $]T_-, T_+[$, $y(t) = \left[\sqrt{y(t_0)} + \dfrac{t - t_0}{2}\right]^2$. Ce raisonnement est valide tant que $\sqrt{y(t_0)} + \frac{t-t_0}{2}$ est strictement positif, ce qui ne pose pas de problème pour t plus grand que t_0, donc $T_+ = +\infty$. On a une annulation pour t plus petit que t_0, ce qui nous donne $T_- = t_0 - 2\sqrt{y(t_0)}$. Au final, on a donc, pour tout t dans $]T_-, +\infty[$,

$$y(t) = \frac{(t - T_-)^2}{4}.$$

Au final, on a montré que si $y(t_0)$ est strictement positive pour un certain instant t_0, nécessairement il existe un réel $T_- < t_0$ tel que pour tout t dans $]T_-, +\infty[$, $y(t) = \frac{(t-T_-)^2}{4}$.
3) Par un raisonnement identique, il existe alors $T_+ > t_0$ tel que pour tout t dans $]-\infty, T_+[$, $y(t) = \frac{(t-T_+)^2}{4}$.
4) Soit T dans $\mathbb{R}$ quelconque. Notons

$$y_T : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(t-T)^2}{4}.$$

Clairement, $y_T(T) = 0$, $y_T'(T) = 0$ et $y''(T) = \frac{1}{2}$. On définit alors

$$y_{0T} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq T, \\ y_T(t) \text{ sinon,} \end{cases} \qquad y_{T0} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \geq T, \\ y_T(t) \text{ sinon,} \end{cases}$$

et pour T_1, T_2 dans $\mathbb{R}$, $T_1 < T_2$,

$$y_{T_1 0 T_2} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} y_{T_1} \text{ si } t \leq T_1, \\ 0 \text{ si } t \in]T_1, T_2[, \\ y_{T_2}(t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

On voit que pour tout T, $T_1 < T_2$, y_T, y_{0T}, y_{T0} et $y_{T_1 0 T_2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et par le raisonnement précédent, ce sont toutes les solutions non identiquement nulle de l'équation différentielle $(y')^2 = y$. Les seules solutions de classe C^2 sont la fonction nulle, et les fonctions y_T pour T réel quelconque.

Exercice 7
1) Je suis convaincu. Et vous ?
2) La fonction $f : y \in \mathbb{R} \mapsto y$ est bien évidemment Lipschitzienne, le Théorème de Cauchy-Lipschitz local (Théorème 5.9) assure l'existence et l'unicité de (J, y) solution maximale de $(\mathcal{P}_e)$. Par définition, y est de classe C^1 sur J. Par l'équation différentielle, on en déduit que $y' = y$ est aussi de classe C^1 sur J, donc y est de classe C^2 sur J. Une récurrence immédiate donne alors le résultat.
3) On voit que $(\mathbb{R}, y_0)$, où y_0 est la fonction constante nulle, est aussi solution de l'équation différentielle $y' = y$, et on a $y_0(0) = 0 < y(0) = 1$. Par le Corollaire 5.15, on en déduit que $y > y_0$ sur $J \cap \mathbb{R} = J$, ce qui donne le résultat.
4) On vient de voir que $y > 0$ sur J. Comme $y' = y$, on a aussi $y' > 0$ sur J, et donc y est strictement croissante sur J. En particulier, pour tout $t \leq 0$, on a $0 < y(t) \leq y(0) = 1$, donc $y(t) \in [0, 1]$ pour tout t dans $]\inf(J), 0]$. Ainsi, y reste dans le compact $[0, 1]$ pour t proche de $\inf(J)$. Le Théorème de sortie des compacts (plus précisément son Corollaire 5.23) donne alors $\inf(J) = -\infty$.
5) v_N est polynomiale donc de classe C^∞. Comme $0 \leq t \leq \sup(J) < N$, on a $1 - \frac{t}{N} > 0$, et donc $v_N(t) > 0$ pour tout t dans $[0, \sup(J)]$. Finalement, pour t dans $[0, \sup(J)]$

$$v_N'(t) = -\left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} < 0,$$

et donc v_N est strictement décroissante sur $[0, \sup(J)]$.
6) Pour t dans $]0, \sup(J)[$, on a

$$\begin{aligned} w'(t) = (y\, v_N)'(t) = y'(t)\, v_N(t) + y(t)\, v_N'(t) = y(t)\left(v_N'(t) + v_N(t)\right) \\ = y(t)\left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1}\left(1 - \frac{t}{N} - 1\right) = -\frac{t}{N} y(t)\left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi w est strictement décroissante sur $[0, \sup(J)[$. On en déduit que pour tout t dans $[0, \sup(J)[$,

$$1 = w(0) \geq w(t) = y(t)v_N(t) \Rightarrow y(t) \leq \frac{1}{v_N(t)} \leq \frac{1}{v_N(\sup(J))}.$$

Comme par ailleurs $y(t) \geq 1$ pour t dans $[0, \sup(J)[$, il vient que y reste dans le compact $\left[1, v_N(\sup(J))^{-1}\right]$ pour t proche de $\sup(J)$, ce qui implique par le Corollaire 5.23 que $\sup(J) = \infty$, en contradiction avec l'hypothèse.
Donc $\sup(J) = +\infty$, et la solution est donc globale.
7) Fixons b dans $\mathbb{R}$, et posons

$$y_1 : a \in \mathbb{R} \mapsto y(a+b), \quad y_2 : a \in \mathbb{R} \mapsto y(a)\, y(b).$$

Un simple calcul montre que $(\mathbb{R}, y_1)$ et $(\mathbb{R}, y_2)$ satisfont le problème de Cauchy

$$z' = z, \quad z(0) = y(b).$$

Or ce problème admet une unique solution maximale. Donc $y_1 = y_2$.

Exercice 8
1) Supposons $(\mathbb{R}, y_l)$ solution de l'équation différentielle. On a alors, pour tout t réel,

$$0_{\mathbb{R}^d} = y'(t) = f(y(t)) = f(l).$$

Réciproquement, on voit que si $f(l) = 0_{\mathbb{R}^d}$, et comme y_l est constante, on a bien $y_l' = f(y_l)$, et donc $(\mathbb{R}, y_l)$ est solution de l'équation différentielle.
2) Comme indiqué, on considère $g : t \in J \mapsto (y(t), f(l))_{\mathbb{R}^d} \in \mathbb{R}$, qui est une fonction de classe C^1 sur J, avec $g'(t) = (y'(t), f(l))_{\mathbb{R}^d}$. On note alors que comme f est continue et y satisfait $y' = f(y)$,

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} f(y(t)) = f\left(\lim_{t\to\infty} y(t)\right) = f(l).$$

On a donc

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = (l, f(l))_{\mathbb{R}^d}, \quad \lim_{t\to\infty} g'(t) = \|f(l)\|^2_{\mathbb{R}^d}.$$

Ainsi, g et g' admettent une limite finie en $+\infty$, ce qui implique (Exercice 1 de la feuille de Td 1)

$$\|f(l)\|^2_{\mathbb{R}^d} = \lim_{t\to\infty} g'(t) = 0.$$

Exercice 9 – Soit (J, y) une solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. Soit $t_0 \in J$. On pose

$$g : t \in J \mapsto \frac{1}{2}\|y(t)\|^2_{\mathbb{R}^d} \in \mathbb{R},$$

qui est de classe C^1 sur J, et vérifie, pour tout t dans J,

$$g'(t) = \big(y'(t), y(t)\big)_{\mathbb{R}^d} = \big(f(t, y(t)), y(t)\big)_{\mathbb{R}^d}.$$

On en déduit, pour tout t dans J,

$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(f(t, y(s)), y(s)\big)_{\mathbb{R}^d}\, ds,$$

ce qui donne immédiatement

$$\begin{aligned} g(t) \leq g(t_0) + \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(t, y(s)), y(s)\big)_{\mathbb{R}^d}\, ds\right| &\leq g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left|\big(f(t, y(s)), y(s)\big)_{\mathbb{R}^d}\right|\, ds \\ &\leq g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(c_1(s)\|y(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} + c_2(s)\big)\, ds \leq g(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} 2\, c_1(s) g(s)\, ds. \end{aligned}$$

Supposons alors $\sup(J) < \sup(I)$. Comme c_2 est continue sur I à valeurs positives, il vient, pour tout $t \geq t_0$,

$$\int_{t_0}^{t} c_2(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{\sup(J)} c_2(s)\,ds < \infty,$$

et donc, toujours pour $t \geq t_0$,

$$g(t) \leq g(t_0) + \int_{t_0}^{\sup(J)} c_2(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} 2\,c_1(s)g(s)\,ds.$$

Par Grönwall, on a donc, pour tout $t \geq t_0$,

$$g(t) \leq \left(g(t_0) + \int_{t_0}^{\sup(J)} c_2(s)\,ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} 2\,c_1(s)\,ds\right).$$

Comme c_1 est continue sur I à valeurs positives, on a

$$\int_{t_0}^{t} 2\,c_1(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{\sup(J)} 2\,c_1(s)\,ds < \infty,$$

ce qui donne alors

$$\frac{1}{2}\|y(t)\|_{\mathbb{R}^d} = g(t) \leq \left(g(t_0) + \int_{t_0}^{\sup(J)} c_2(s)\,ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^{\sup(J)} 2\,c_1(s)\,ds\right).$$

Ainsi y est bornée au voisinage de $\sup(J)$, donc $\sup(J) = \sup(I)$: contradiction. Conclusion : $\sup(J) = \sup(I)$, et on obtient par un raisonnement similaire $\inf(J) = \inf(I)$.

Exercice 10 – Notons $J_T = \{t \in \mathbb{R}, t - T \in J\}$. On voit que $J \cap J_T \neq \emptyset$ puisque $t_0 + T$ est dans J et J_T. Posons alors

$$y_T : t \in J_T \mapsto y(t - T) \in \mathbb{R}^d.$$

Alors y_T est de classe C^1 sur J_T, comme composée de la fonction $t \in J_T \mapsto t - T \in J$ et de $y : J \mapsto \mathbb{R}^d$, toutes deux fonctions de classe C^1 sur leurs intervalles respectifs. On voit que pour tout t dans J_T,

$$y_T'(t) = \frac{d}{dt}(y(t-T)) = y'(t-T) = f(t-T, y(t-T)) = f(t, y(t-T)) = f(t, y_T(t)),$$

et par ailleurs $y_T(t_0 + T) = y(t_0 + T - T) = y(t_0) = y(t_0 + T)$. Ainsi, (J, y) et (J_T, y_T) sont toutes deux solutions du problème du Cauchy

$$z' = f(t, z),\ z(t_0 + T) = y(t_0 + T).$$

Comme f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, on en déduit que $y_T = y$ sur $J \cap J_T$. On vérifie alors comme d'habitude que

$$z : t \in J \cup J_T \mapsto \begin{cases} y \text{ si } t \in J, \\ y_T \text{ si } t \in J_T, \end{cases}$$

est bien définie, de classe C^1, et que $(J \cup J_T, z)$ est solution du problème de Cauchy

$$z' = f(t, z),\ z(t_0) = y(t_0).$$

Comme (J, y) est solution maximale du même problème, comme $J \subset J \cup J_T$ et $z_{|J} = y$, on en déduit $J = J_T \cup J$. Ainsi, tout t dans J_T est dans J, ce qui revient à

$$t \in J \Rightarrow t + T \in J,$$

ce qui implique immédiatement $\sup(J) = +\infty$. En faisant le même raisonnement dans J_{-T}, on obtient $\inf(J) = -\infty$, ce qui termine l'exercice.

Exercice 11

1) Comme $\sup(J) \in I$, f est continue sur $[t_0, \sup(J)] \times \mathscr{K}$ qui est un compact, on peut donc poser

$$M = \max_{(t,y)\in[t_0,\sup(J)]\times\mathscr{K}} \|f(t,y)\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Il vient, pour tout t dans $[t_0, \sup(J)[$, $(t, y(t)) \in [t_0, \sup(J)] \times \mathscr{K}$, et donc

$$\|y'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = \|f(t, y(t))\|_{\mathbb{R}^d} \leq M.$$

2) C'est direct : pour tout (t_1, t_2) dans $[t_0, \sup(J)[$, on a

$$\|y(t_1) - y(t_2)\|_{\mathbb{R}^d} = \left\| \int_{t_1}^{t_2} y'(s)\, ds \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|y'(s)\|_{\mathbb{R}^d}\, ds \right| \leq M|t_1 - t_2|.$$

3) Il s'agit en fait de montrer (si vous ne le savez pas) qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle [a,b[, avec $b < \infty$, admet une limite finie en b.
Montrons-le dans le cas présent. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[t_0, \sup(J)[$ ayant pour limite $\sup(J)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Posons $y_n = y(t_n)$. Par hypothèse, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{K}$ compact, il existe donc une sous-suite (toujours notée y_n) et $y_l \in \mathscr{K}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_l.$$

On note toujours la suite d'instant correspondant t_n. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} y(t_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_l.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|t_N - \sup(J)| \leq \frac{\varepsilon}{3\,M}, \quad \|y(t_n) - y_l\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{3\,M}$. Alors, pour tout $t \in J$, $|t - \sup(J)| \leq \eta$, on a

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_l\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|y(t) - y(t_N)\|_{\mathbb{R}^d} + \|y(t_N) - y_l\|_{\mathbb{R}^d} &\leq M\,|t - t_N| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq M\,\left(|t - \sup(J)| + |t_N - \sup(J)|\right) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Le résultat suit.

4) C'est direct par continuité de f en $(\sup(J), y_L) \in I \times \Omega$. On a en effet, pour tout $t \in [t_0, \sup(J)[$,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \xrightarrow[t\to\sup(J)]{} f(\sup(J), y_l).$$

5) C'est une application directe du Théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction f étant continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

6) Par définition, $\sup(J) \in \tilde{J}$. Notons que par construction, $\mathscr{Y} \in C^1(J)$, $\mathscr{Y} \in C^1(\tilde{J} \setminus \overline{J})$, et on a

$$\mathscr{Y}'(t) = f(t, \mathscr{Y}(t)),\ \forall t \in J \cup \tilde{J} \setminus \overline{J}.$$

Des problèmes peuvent donc seulement apparaître en $\sup(J)$. On a

$$\lim_{t\to\sup(J)_-} \mathscr{Y}(t) = \lim_{t\to\sup(J)_-} y(t) = y_l = \tilde{y}(\sup(J)) = \mathscr{Y}(\sup(J)) = \lim_{t\to\sup(J)_+} \tilde{y}(t) = \lim_{t\to\sup(J)_+} \mathscr{Y}(t),$$

ainsi $\mathscr{Y}$ est continue en $\sup(J)$. De même

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\sup(J)_-} \mathscr{Y}'(t) = \lim_{t\to\sup(J)_-} y'(t) = \lim_{t\to\sup(J)_-} f(t, y(t)) = f(\sup(J), y_l) = f(\sup(J), \mathscr{Y}(\sup(J))) = \tilde{y}'(\sup(J)) \\ = \lim_{t\to\sup(J)_+} \tilde{y}'(t) = \lim_{t\to\sup(J)_+} \mathscr{Y}'(t). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{Y}$ est dérivable en $\sup(J)$, de dérivée $\mathscr{Y}'(\sup(J)) = f(\sup(J), \mathscr{Y}(\sup(J)))$. Ainsi, on a bien $(J \cup \tilde{J}, \mathscr{Y})$ solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. Or $J \subset J \cup \tilde{J}$, et par définition $\mathscr{Y}_{|J} = y$. Comme (J, y) est solution maximale de l'équation différentielle, il vient $J = J \cup \tilde{J}$. Mais c'est impossible, car $\sup(J) \notin J$ et $\sup(J) \in J \cup \tilde{J}$. Contradiction.
On en déduit que $\sup(J) = \sup(I)$, et on retrouve le Corollaire 5.23.

Exercice 12

1) La fonction $f : y \in \mathbb{R} \mapsto y \sin(y)^2$ est de classe C^∞, donc localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité de la solution maximale de $(\star)$.

2) On suppose $J_0 = \mathbb{R}$ et $y_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto c \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_0' = 0 = c\,\sin(c)^2,$$

et donc $c = k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, $x_0 = y_0(0) = c = k\,\pi$.

Réciproquement, supposons $x_0 = k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $(\mathbb{R}, y : t \in \mathbb{R} \mapsto k\,\pi)$ est solution maximale de $(\star)$, puisque

$$y'(t) = 0 = (k\,\pi)\,\sin(k\,\pi)^2 = y(t)\,\sin(y(t))^2,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par unicité de la solution maximale, on a $J_0 = \mathbb{R}$ et $y_0 = y$.

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\,\pi \leq x_0 < (k+1)\pi$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{Y}_c : t \in \mathbb{R} \mapsto c$. Alors $(\mathbb{R}, \mathscr{Y}_{k\,\pi})$ et $(\mathbb{R}, \mathscr{Y}_{(k+1)\pi})$ sont deux solutions maximales de l'équation différentielle $y' = y\sin(y)^2$. Comme $\mathscr{Y}_{k\pi}(0) \leq y_0(0) = x_0 < \mathscr{Y}_{(k+1)\pi}(0)$, on a, pour tout t dans J_0, $\mathscr{Y}_{k\,\pi}(t) \leq y_0(t) \leq \mathscr{Y}_{(k+1)\pi}(t)$. On a donc, pour tout t dans J_0, $y_0(t) \in [k\,\pi, (k+1)\,\pi]$. Ainsi, y_0 est borné aux voisinages de $\sup(J_0)$ et $\inf(J_0)$, et donc $J_0 = \mathbb{R}$.

4) Comme $(\mathbb{R}, \mathscr{Y}_0)$ est solution maximale de l'équation différentielle $y' = y\sin(y)^2$, on a $x_0 \geq 0 \Rightarrow y_0(t) \geq 0$ (resp. $x_0 \leq 0 \Rightarrow y_0(t) \leq 0$) pour tout t réel. Ainsi :

— si $x_0 \geq 0$, alors $y'(t) = y(t)\sin(y(t))^2 \geq 0$ pour tout t réel : y est croissante,

— si $x_0 \leq 0$, alors $y'(t) = y(t)\sin(y(t))^2 \leq 0$ pour tout t réel : y est décroissante.

5) Si $x_0 = k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $y_0 = \mathscr{Y}_{k\,\pi}$, elle est donc constante. Donc

$$\lim_{t\to-\infty} y_0(t) = \lim_{t\to\infty} y_0(t) = k\,\pi.$$

Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que $k\pi < x_0 < (k+1)\pi$. Alors y est dans $[k\,\pi, (k+1)\pi]$ (question 3) et croissante (question 4), elle admet donc des limites en $\pm\infty$, que nous noterons $l_\pm$. Notons que nécessairement, $l_\pm \in [k\pi, (k+1)\pi]$, et $l_- \leq x_0 \leq l_+$. D'après l'Exercice 8, ces limites sont des équilibres de l'équation différentielle, donc il existe $m_\pm \in \mathbb{Z}$ tel que $l_\pm = m_\pm\,\pi$. On a donc nécessairement $l_+ = (k+1)\pi$ et $l_- = k\,\pi$.

Si maintenant il existe $k \leq 0$ tel que $(k-1)\pi < x_0 < k\pi$, un raisonnement similaire montre que

$$\lim_{t\to\infty} y_0(t) = (k-1)\pi, \quad \lim_{t\to-\infty} = k\,\pi.$$

6) Notons $z : t \in \mathbb{R} \mapsto -y_+(t)$. Alors $z(0) = -y_+(0) = -x_0$, et pour tout t réel,

$$z'(t) = -y_+'(t) = -y_+(t)\sin(y_+(t))^2 = -y_+(t)\sin(-y_+(t))^2 = z(t)\sin(z(t))^2.$$

Ainsi, $(\mathbb{R}, z)$ est solution maximale du problème de Cauchy $y' = y\sin(y)^2$, $y(0) = -x_0$. Par unicité de la solution maximale, on obtient $z = y_-$, ce qui termine l'exercice.

Exercice 13

1) Clairement, f est polynomiale en t et y, donc C^∞, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On peut aussi simplement le montrer directement. Ainsi, soit y_0 dans $\mathbb{R}$. Posons $\mathcal{V}_0 = [-2|y_0|, 2\,|y_0|]$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et y_1, y_2 dans $\mathcal{V}_0$. Il vient

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t^2 + y_1^2 - t^2 - y_2^2| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 4\,|y_0||y_1 - y_2|.$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz local, il vient que $(\star)$ admet une unique solution maximale.

2)

(i) On peut écrire $\tilde{y} = z \circ s$, où $s : t \in \tilde{J} \mapsto -t \in J$ est de classe C^∞, et $z : t \in J \mapsto -y(t) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1. Ainsi, $\tilde{y}$ est bien définie de $\tilde{J}$ dans $\mathbb{R}$, et de classe C^1.

(ii) On note tout d'abord que $0 = -0$, et donc $0 \in \tilde{J}$, et on a $\tilde{y}(0) = y(-0) = 0$. Par ailleurs, pour tout t dans $\tilde{J}$,

$$\tilde{y}'(t) = \frac{d}{dt}(z \circ s)(t) = s'(t)z'(s(t)) = -z'(s(t)) = y'(s(t)) = s(t)^2 + y(s(t))^2$$
$$= (-t)^2 + (-z(s(t)))^2 = t^2 + \tilde{y}(t)^2.$$

On a donc bien $(\tilde{J}, \tilde{y})$ solution de $(\star)$, ce qui implique (Proposition 5.14) $y = \tilde{y}$ sur $J \cap \tilde{J}$.

(iii) Il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition de $\mathscr{Y}$ puisque $y = \tilde{y}$ sur $J \cap \tilde{J}$. Par ailleurs, $\mathscr{Y}$ est continue sur J (resp. sur $\tilde{J}$) puisqu'elle y est égale à y (resp. $\tilde{y}$). Elle est donc continue sur $J \cup \tilde{J}$. Soit t dans $J \cup \tilde{J}$. Alors, soit t est dans J, et donc $[\min(0,t), \max(0,t)] \subset J$, ce qui implique

$$\mathscr{Y}(t) = y(t) = \int_0^t f(s, y(s))\, ds = \int_0^t f(s, \mathscr{Y}(s))\, ds,$$

soit t est dans $\tilde{J}$, et alors par un raisonnement identique

$$\mathscr{Y}(t) = \tilde{y}(t) = \int_0^t f(s, \tilde{y}(s))\, ds = \int_0^t f(s, \mathscr{Y}(s))\, ds.$$

Ainsi, $(J \cup \tilde{J}, \mathscr{Y})$ est solution de $(\star)$.

(iv) On a : (J, y) solution maximale de $(\star)$, $(J \cup \tilde{J}, \mathscr{Y})$ solution de $(\star)$, $J \subset J \cup \tilde{J}$ et $\mathscr{Y}_{|J} = y$. On a donc $J = J \cup \tilde{J}$, soit encore $]-\alpha, \beta[=]-\max(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)[$. On en déduit directement que $\alpha = \beta$.

On a alors $J = \tilde{J}$, et donc par (ii), pour tout t dans J, $y(t) = \tilde{y}(t) = -y(-t)$: y est impaire.

3) Pour tout t dans J, $y'(t) = t^2 + y(t)^2 \geq 0$ donc y est croissante. On peut même dire plus : pour tout t dans J, $t \neq 0$, $y'(t) = t^2 + y(t)^2 > 0$, donc y est strictement croissante sur J. En particulier, pour tout t dans J, $t > 0$, on a $y(-t) < y(0) = 0 < y(t)$.
Par ailleurs, $t \in J \mapsto t^2 + y(t)^2$ est de classe C^1, donc y est de classe C^2, et pour tout t dans J,

$$y''(t) = 2\,t + 2y'(t)y(t) = 2\,t + 2\,y(t)(t^2 + y(t)^2).$$

Ainsi, pour $t > 0$ dans J, $y''(t) > 0$, pour $t < 0$ dans J, $y''(t) < 0$, et $y''(0) = 0$. Ainsi, y est strictement convexe sur $J \cap]0, \infty[$, strictement concave sur $J \cap]-\infty, 0[$, et présente un point d'inflexion en zéro.
4) Par une récurrence immédiate, on voit que y est de classe C^∞ sur J. On peut alors faire un développement de Taylor-Young de y en zéro :

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + \frac{t^2}{2}y''(0) + \frac{t^3}{6}y'''(0) + o(t^3).$$

On a déjà vu que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$. Par ailleurs,

$$y'''(0) = \frac{d}{dt}(2\,t + 2\,y(t)(t^2 + y(t)^2))_{|t=0} = 2.$$

Le résultat suit.
5) Pour $t \geq 1$, on a $y'(t) = t^2 + y(t)^2 \geq 1 + y(t)^2$. Comme $1 + y(t)^2 > 0$, il vient

$$\frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = \frac{d}{dt}\big(\arctan(y)\big)(t) \geq 1,$$

et donc, par intégration entre 1 et $t \geq 1$,

$$\arctan(y(t)) \geq \arctan(y(1)) + (t-1) = t + \underbrace{\arctan(y(1)) - 1}_{=c}.$$

Comme $\arctan(y(t)) \leq \frac{\pi}{2}$, on devrait avoir $t + c \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $t \geq 1$, ce qui est absurde. On en déduit que $\sup(J) < +\infty$.

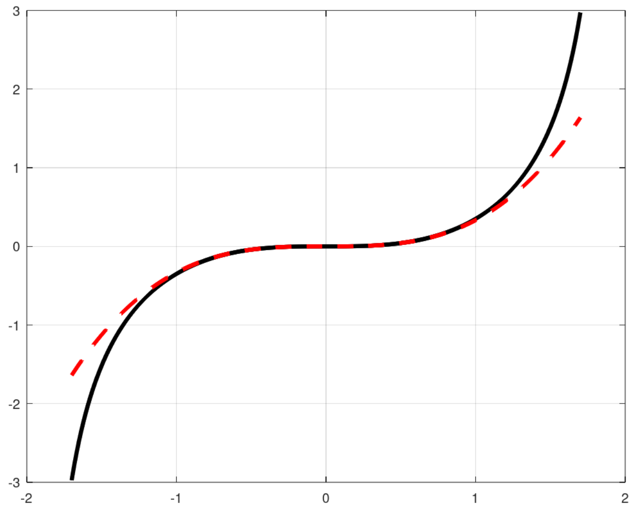
6) Comme $\sup(J) < \infty$, le Théorème d'Explosion en temps fini nous donne

$$\lim_{t \to \sup(J)} |y(t)| = +\infty.$$

Comme de plus y est strictement croissante, nécessairement

$$\lim_{t \to \sup(J)} y(t) = +\infty.$$

7) À vos stylos ! Notez qu'on a, pour $t > 0$, $y(t) > \frac{t^3}{3}$, ce qui fournit une nouvelle information pour le dessin.



La fontion y en trait plein noir, obtenue par résolution numérique de l'équation différentielle. Pour comparaison, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t^3}{3}$ en tirets rouges.

Exercice 14

1) L'application $n \in \mathbb{R} \mapsto \alpha n \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ est polynomiale, donc de classe C^∞, donc localement lipschitzienne. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui donne le résultat.

2) Supposons $(J, n : t \in J \mapsto n_0)$ soit une solution de $(\star)$. Notons qu'alors nécessairement $J = \mathbb{R}$. Par ailleurs, on aura pour tout t,

$$0 = n'(t) = \alpha n(t) \left(1 - \frac{n(t)}{N}\right) = \alpha n_0 \left(1 - \frac{n_0}{N}\right),$$

ce qui implique $n_0 = 0$ ou $n_0 = N$. Ainsi, n est constante si et seulement si $n_0 = 0$ ou $n_0 = N$.

3) On sait par la question précédente que si $n_0 = 0$ (resp. $n_0 = N$), alors n est constante égale à 0 (resp. égale à N), ce qui répond à la question.

On suppose donc $n_0 \in]0, N[$, ce qui implique immédiatement (Corollaire 5.15) que pour tout t dans J, on a $0 < n(t) < N$. Ainsi la solution reste dans le compact $[0, N]$ pour tout t, elle est donc globale : $J = \mathbb{R}$.

Comme pour tout réel t, on a $0 < n(t) < N$, il vient directement $n'(t) > 0$, et donc n est strictement croissante. Comme elle est borné, elle admet des limites finies en $\pm\infty$, qui sont d'après le résultat de l'Exercice 8 des équilibres de l'équation différentielle. On en déduit que

$$\lim_{t \to -\infty} n(t) = 0, \ \lim_{t \to \infty} n(t) = N.$$

4) Si $n_0 > N$, alors, toujours par le Corollaire 5.15, $n(t) > N$ pour tout t dans J. Ainsi, $n'(t) < 0$, et donc n est strictement décroissante sur J. En particulier, pour tout $t \in J \cap [0, \infty[$, on a $n_0 \geq n(t) > N$, ce qui implique par le Théorème de sortie des compacts $\sup(J) = \infty$. Comme n est décroissante et minorée, elle admet une limite finie en $+\infty$. L'Exercice 8 implique alors directement que $n(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} N$. Notons que, toujours car $n(t) > N > 0$, on a, pour tout t dans J,

$$n'(t) = \alpha n(t) - \alpha \frac{n(t)^2}{N} > -\alpha \frac{n(t)^2}{N} \Rightarrow \frac{n'(t)}{n(t)^2} > -\frac{\alpha}{N}.$$

En intégrant entre 0 et t, il vient

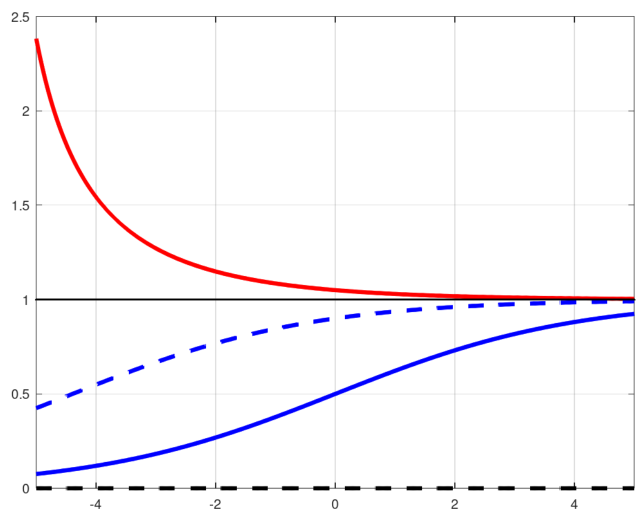
$$-\frac{1}{n(t)} + \frac{1}{n_0} > -\frac{\alpha t}{N} \Rightarrow n(t) > \frac{n_0}{1 + \alpha \frac{n_0}{N} t}.$$

Comme

$$\lim_{t \to -\frac{N}{\alpha n_0}} \frac{n_0}{1 + \alpha \frac{n_0}{N} t} = +\infty,$$

nécessairement $\inf(J) = -\beta > -\infty$. Le Théorème d'Explosion en temps fini nous donne alors $|n(t)| \xrightarrow[t\to-\beta]{} +\infty$. Comme par ailleurs n est strictement positive, on obtient $n(t) \xrightarrow[t\to-\beta]{} +\infty$.

Remarque : il existe une autre approche pour résoudre l'Exercice, qui consiste... à résoudre l'équation différentielle $n' = \alpha n \left(1 - \frac{n}{N}\right)$.



La fonction $g : t \in J \mapsto \frac{n(t)}{N}$ pour t dans $[-5, 5]$, qui satisfait le problème de Cauchy $g' = \alpha g(1 - g)$, $g(0) = \frac{n_0}{N}$, pour $\alpha = 0.5$ et différentes valeurs de $g(0)$. En noir plein, $g(0) = 1$, en noir pointillé, $g(0) = 0$, en bleu plein, $g(0) = 0.5$, en bleu pointillé, $g(0) = 0.9$, en rouge, $g(0) = 1.05$ (dans ce dernier cas, $\beta < -5$).